

Ensembles quasi-indépendants et ensembles de Sidon, théorie de Bourgain (d'après Myriam Déchamps, Li et Queffelec [6],)

Jean-Pierre kahane
Laboratoire de Mathématique,
Université Paris-Sud à Orsay

Les ensembles de Sidon ont 50 ans. Leur préhistoire comprend les séries lacunaires de Weierstrass, de Poincaré et d'Hadamard, utilisées pour mettre en évidence des fonctions continues nulle part dérivables, et des séries de Taylor nulle part prolongeables en dehors du disque de convergence. La mise en évidence de leurs propriétés fondamentales dans le cas des suites lacunaires à la Hadamard est due à Sidon et à Banach. Leur définition apparaît en 1957 et 1960 dans deux articles, de Walter Rudin et de moi, et elle est popularisée par le livre de Rudin "Fourier analysis on groups" [3], [11], [12].

Les ensembles de Sidon ont servi de banc d'essai à la méthode de sélection aléatoire, introduite dans une note de Katznelson et Malliavin relative à la "conjecture de dichotomie" [5], et reprise par Katznelson en vue de l'étude du comportement des ensembles de Sidon plongés dans le groupe de Bohr [4]. La sélection aléatoire est essentielle dans la théorie de Bourgain que je vais exposer.

La réunion de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon : c'est le théorème de Drury (1970) [2], qui a été le point de départ de travaux brillants jusqu'au milieu des années 80. Le recours aux probabilités apparaît dès la note de Drury et il est présent dans tous les travaux ultérieurs.

Il y a une parenté manifeste entre les ensembles de Sidon et les suites de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. Mais dans la plupart des groupes abéliens discrets (par exemple \mathbb{Z}) il n'existe pas de sous-ensemble

indépendant infini. Un outil de base pour la mise en évidence et l'étude des ensembles de Sidon est constitué par les produits de Riesz, comme on va le voir. Et le cadre naturel pour les produits de Riesz est celui des ensembles quasi-indépendants, qui sont des ensembles de Sidon particuliers.

Toute réunion finie d'ensembles quasi-indépendants est un ensemble de Sidon ; c'est une conséquence du théorème de Drury, et la preuve directe est facile (voir ci-après). Est-il vrai que tout ensemble de Sidon est une réunion finie d'ensembles quasi-indépendants ? La question est toujours ouverte.

Un théorème de Pisier caractérise les ensembles de Sidon en termes d'ensembles quasi-indépendants. Le but principal de cet article est d'en faire l'exposé, la généralisation et la démonstration par la méthode de Bourgain. C'est le parti-pris de Daniel Li et Hervé Queffelec dans leur livre, et ils se réfèrent à Myriam Déchamps pour expliciter la pensée de Jean Bourgain, exprimée dans ses articles de façon très concentrée. Le présent article n'apporte essentiellement rien de nouveau. Sa rédaction a suivi une invitation de Ben Green à l'Institut Newton de Cambridge, à tenter de faire le point sur les ensembles de Sidon, en janvier 2007.

Les références principales se trouvent dans [6]. Je me borne ici à [8], [9], [10], [1], pour les travaux de Pisier et Bourgain.

La partie 1 introduira les notations et définitions. La partie 2 donnera les premiers résultats sur ensembles quasi-indépendants et ensembles de Sidon et la partie 3 quelques exemples. La partie 4, la plus importante, sera un exposé de la théorie de Bourgain.

1 Notations et premières définitions équivalentes

G est un groupe abélien compact.

Γ est son dual, groupe abélien discret, noté multiplicativement.

Λ est une partie de Γ .

Λ est quasi-indépendante (*qi*) si l'égalité $\prod \lambda^{\varepsilon(\lambda)} = 1$, où $\lambda \in \Lambda$, $\varepsilon(\lambda) \in \{-1, 0, 1\}$ et $\sum |\varepsilon(\lambda)| < \infty$, entraîne que tous les $\varepsilon(\lambda)$ sont nuls. Dans toute la suite, on supposera sans le préciser $\lambda \in \Lambda$.

Λ est S -Sidon si, pour toute somme finie $f = \sum \hat{f}(\lambda)\lambda$, on a

$$\sum |\hat{f}(\lambda)| \leq S \sup_{g \in G} |f(g)|$$

ce que nous écrirons sous la forme

$$\|f\|_A \leq S\|f\|_C;$$

$A = A(G)$ est l'algèbre de Banach constituée par les sommes de séries de Fourier absolument convergentes, c'est-à-dire $A(G) = \mathcal{F}\ell^1(\Gamma)$;

$C = C(G)$ est l'algèbre de Banach constituées par les fonctions continues sur G ; les normes sont explicitées ci-dessus.

Λ est un ensemble de Sidon (en bref, est Sidon) s'il est S -Sidon pour un certain réel S . Sa constante de Sidon est la borne inférieure des S en question.

Les sous-espaces fermés engendrés par Λ dans A , C et $L^\infty (= L^\infty(G))$, sont notés A_Λ , C_Λ et L_Λ^∞ .

" Λ est Sidon" s'exprime, de façon équivalente, par l'une des égalités d'ensembles qui suivent :

$$\begin{aligned} A_\Lambda &= C_\Lambda, \\ A_\Lambda &= L_\Lambda^\infty, \\ \ell^\infty(\Lambda) &= \widehat{M}|_\Lambda \\ c_0(\Lambda) &= \widehat{L}^1|_\Lambda \end{aligned}$$

dans lesquelles $\ell^\infty(\Lambda)$ et $c_0(\Lambda)$ représentent respectivement les suites (ou fonctions) bornées resp. tendant vers 0 à l'infini sur Λ , et $\widehat{M}|_\Lambda$ resp. $\widehat{L}^1|_\Lambda$ les restrictions à Λ des transformées de Fourier de mesures de Radon bornées resp. de fonctions intégrables sur G .

Voici un critère commode : Λ est Sidon sii (si et seulement si)

$$\exists \delta > 0 : \forall \varphi \in \{-1, 1\}^\Lambda \exists \mu \in M(G) : \quad \forall \xi \lambda |\widehat{\mu}(\lambda) - \varphi(\lambda)| \leq 1 - \delta.$$

Enfin, Λ est S -Sidon sii pour toute application $\lambda \longrightarrow z(\lambda)$, $|z(\lambda)| = 1$, il existe $\mu \in M(G)$, $\int |d\mu| = 1$, telle que $Re(z(\lambda) \int \lambda d\mu) \geq \frac{1}{S}$.

Toutes ces équivalences sont faciles à établir et se trouvent dans [12] et [6].

2 Quasi-indépendants et ensembles de Sidon, premiers résultats

i) Tout qi est Sidon

ii) Toute réunion finie de qi est Sidon

iii) Soit $\Lambda \subset \Gamma$. S'il existe $c = c(\Lambda) > 0$ tel que, pour toute mesure positive ϖ sur Λ , il existe une partie Λ' de Λ qi et telle que $\varpi(\Lambda') \geq \varpi(\Lambda)$, Λ est Sidon (et S -Sidon avec $S = S(c)$).

Voici les preuves, et quelques compléments. Pour justifier les calculs, on peut se restreindre d'abord au cas où Λ est fini.

i) Supposons Λ *qi*. Le produit de Riesz associé est

$$R = \prod (1 + \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})) = \prod (1 + \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1})).$$

Son développement est

$$R = \sum_{(\varepsilon_\lambda)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum |\varepsilon_\lambda|} \prod \lambda^{\varepsilon_\lambda}, \quad \varepsilon_\lambda = \{-1, 0, 1\}, \sum |\varepsilon_\lambda| < \infty.$$

Comme, suite à la quasi-indépendance, le terme constant est 1, R est une mesure de probabilité et on peut écrire $R = \sum \hat{R}(\gamma) \gamma$ (le signe = signifiant le développement formel en série de Fourier) avec $\hat{R}(1) = 1$, $0 \leq \hat{R}(\gamma) \leq 1$,

$$\hat{R}(\lambda) = \frac{1}{2} + \hat{r}_\lambda(\lambda) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \hat{r}_\lambda(\lambda) \leq \frac{1}{2}.$$

Posons maintenant

$$R_{a,z} = \prod \left(1 + \frac{a}{2}(z_\lambda \lambda + \bar{z}_\lambda \bar{\lambda})\right)$$

où $0 < a < 1$ et $|z_\lambda| = 1$; $z = (z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. On a de nouveau une mesure de probabilité, avec $\hat{R}_{a,z}(1) = 1$, et

$$\hat{R}_{a,z}(\lambda) = \frac{a}{2} z_\lambda + \hat{r}_{a,z,\lambda}(\lambda) \quad \text{avec} \quad |\hat{r}_{a,z,\lambda}(\lambda)| \leq \frac{a^2}{2} \text{ si } \bar{\lambda} \neq \lambda.$$

La considération de $R_{a,z}$ permet de conclure, mais on a une preuve plus nette et une meilleure constante de Sidon en introduisant

$$\begin{aligned} R_{a,z}^* &= \int_0^{2\pi} R_{a,z} e^{it} e^{-it} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{(\varepsilon_\lambda)} \left(\frac{a}{2}\right)^{\sum |\varepsilon_\lambda|} \prod (z_\lambda \lambda)^{\varepsilon_\lambda} \int_0^{2\pi} \prod e^{it\varepsilon_\lambda} e^{-it} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{\sum \varepsilon_\lambda = 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum |\varepsilon_\lambda|} \prod (z_\lambda \lambda)^{\varepsilon_\lambda} \end{aligned}$$

C'est une mesure de masse totale ≤ 1 , et

$$\hat{R}_{a,z}^*(\lambda) = \frac{a}{2} z_\lambda + \hat{r}_{a,z,\lambda}^*(\lambda)$$

avec

$$|\widehat{r}_{a,z,\lambda}^*(\lambda)| \leq \widehat{r}_{a,1,\lambda}^*(\lambda) \leq \frac{a^3}{2}$$

donc

$$Re(\overline{z}_\lambda R_{a,z}^*(\lambda)) \geq \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2}.$$

En choisissant $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on voit d'après le dernier critère de la partie 1 que Λ est S -Sidon avec $S = 3\sqrt{3} (< 5, 2)$. ■

On peut pousser l'étude, en regardant le cas $\sum |\varepsilon_\lambda| = 3$, et on arrive à

$$Re(\overline{z}_\lambda R_{a,z}^*(\lambda)) \geq \frac{1}{2} - \frac{a^3}{8} - \frac{a^5}{2};$$

et, en choisissant a pour que le second membre soit minimum, on voit que Λ est S -Sidon avec $S = 4, 27$.

La valeur optimale de S n'est pas connue.

Remarquons que, pour $\gamma \notin \Lambda$,

$$|\widehat{R}_{a,z}^*(\gamma)| \leq \widehat{R}_{a,1}^*(\gamma) \leq a^3 \widehat{R}(\gamma) \leq a^3.$$

ii) Si Λ est une réunion de k ensembles qi , on peut les supposer disjoints, soit $\Lambda', \Lambda'', \dots \Lambda^{(k)}$, et, avec des notations évidentes on pose

$$R_{a,z}^{**} = \frac{1}{k}(R_{a,z'}^* + R_{a,z''}^* + \dots R_{a,z^{(k)}}^*)$$

d'où

$$Re(\overline{z}_\lambda \widehat{R}_{a,z}^{**}(\lambda)) \geq \frac{1}{k} \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{2} - (k-1)a^3 \right)$$

et, en choisissant a de façon à minimiser le second membre, Λ est S -Sidon avec

$$S = 3\sqrt{3} k \sqrt{2k-1}. \quad \blacksquare$$

iii) Supposons vérifiée la condition de Bourgain

(CB) : il existe $c = c(\Lambda) > 0$ tel que, pour toute mesure positive ϖ sur Λ , il existe une partie $\Lambda' \subset \Lambda$, qi et telle que $\varpi(\Lambda') \geq c\varpi(\Lambda)$.

Soit $f = \sum \widehat{f}(\lambda)\lambda$, $\sum |\widehat{f}(\lambda)| < \infty$. Choisissons $\varpi(\lambda) = |\widehat{f}(\overline{\lambda})|$, puis, selon **(CB)**, $\Lambda' \subset \Lambda$, qi , avec

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} |\widehat{f}(\overline{\lambda})| \geq c \sum_{\lambda \in \Lambda} |\widehat{f}(\overline{\lambda})|.$$

On construit $R_{a,z}^*$ ci-dessus sur Λ' , en prenant $\bar{z}_\lambda \hat{f}(\lambda) = |\hat{f}(\lambda)|$ pour $\lambda \in \Lambda'$. Alors

$$\begin{aligned} \|f\|_C &\geq \operatorname{Re} \int f R_{a,z}^* = \sum_{\lambda \in \Lambda'} |\hat{f}(\bar{\lambda})| \operatorname{Re}(\bar{z}_\lambda R_{a,z}^*(\lambda)) + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'} \operatorname{idem} \\ &\geq \sum_{\lambda \in \Lambda'} |\hat{f}(\bar{\lambda})| \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{2} \right) - \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{f}(\bar{\lambda})| a^3 \\ &\geq \left(c \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{2} \right) - a^3 \right) \|f\|_A, \end{aligned}$$

soit, en prenant la plus petite valeur de la parenthèse, $\|f\|_C \geq \frac{1}{S} \|f\|_A$ avec

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{12\sqrt{3}} c^{3/2} (c+2)^{-1/2} (6-c) \quad \blacksquare$$

3 Exemples et remarques

Prenons $G = \mathbb{T}$. Alors $\Gamma = \mathbb{Z}$, qu'on a coutume de noter additivement. L'ensemble $\{2^j, j \in \mathbb{N}\}$ est *q.i.* Il en est de même pour $\{\lambda_j\}$ si les λ_j sont des entiers tels que $\lambda_{j+1}/\lambda_j \geq 2$ ($j \in \mathbb{N}$). $\Lambda = \{\lambda_j\}$ est “lacunaire à la Hadamard” si $\lambda_{j+1}/\lambda_j \geq q$ ($j \in \mathbb{N}$) pour un $q > 1$; c'est alors une réunion finie d'ensembles du type précédent, donc c'est un Sidon.

A ma connaissance, on ne connaît explicitement la constante de Sidon d'un ensemble d'entiers (lorsqu'elle est finie) que dans quelques cas d'ensembles finis [7].

Rappelons la notation usuelle pour $f = \sum \hat{f}(\gamma) \gamma$:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t} \quad (t \in \mathbb{T}).$$

Prenons maintenant $G = \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, $\Gamma = \mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$ (partie de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ constitué des $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tels que $\sum |n_j| < \infty$). Souvent G est pris comme espace de probabilité, Ω , et ses éléments sont alors notés $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_j, \dots)$. Les $e^{2\pi i \omega_j}$ ($j \in \mathbb{N}$) sont des variables aléatoires indépendantes; on les appelle $v \cdot a$ de Steinhaus et les séries $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j e^{2\pi i \omega_j}$ séries de Steinhaus. Elles sont de la forme $\sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{f}(\lambda) \lambda$ en prenant pour Λ l'ensemble des vecteurs de base de $\mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$: $(1, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, \dots)$, $(0, 0, 1, \dots)$..., ou plus simplement en notation multiplicative

l'ensemble des $v \cdot a \cdot$ de Steinhaus. Il est immédiat que Λ est qi et que sa constante de Sidon est $S = 1$.

Prenons enfin $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Les caractères sur G sont les fonctions de Walsh, à valeurs ± 1 , engendrées par les fonctions de Rademacher $r_j = (-1)^{g_j}$ ($g = (g_0, g_1, \dots)$). Les séries de Rademacher sont les séries $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j r_j$ ($= \sum \pm a_j$). L'ensemble Λ des fonctions de Rademacher, qui sont indépendantes, est un ensemble qi . On connaît sa constante de Sidon, qui est $\frac{\pi}{2}$ [13].

Voici un résumé de la preuve.

Par définition, S est la borne supérieure des $\sum |a_j|$ pour tous les choix de a_j complexes nuls à partir d'un certain rang, tels que toutes les sommes $\sum \pm a_j$ soient de module ≤ 1 . Nous pouvons nous borner, quitte à réajuster les a_j , au cas

$$\sup_{(\pm)} \left| \sum \pm a_j \right| = \sum a_j = 1.$$

La première égalité implique $\operatorname{Re} a_j > 0$ soit $-\frac{\pi}{2} \leq \arg a_j < \frac{\pi}{2}$ pour tout j . Ordonnons les a_j par arguments décroissants; ainsi les points $0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots, 1$ sont les sommets consécutifs d'une ligne polygonale concave. Tous ces points sont dans le demi-disque supérieur de diamètre $[0, 1]$; en effet, si l'un d'eux, $a_1 + a_2 + \dots + a_k$, était à l'extérieur, il verrait le segment $[0, 1]$ sous un angle $< \frac{\pi}{2}$, et il s'ensuivrait que $|a_1 + a_2 + \dots + a_k - (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots)| > 1$. La longueur de la ligne polygonale est $\sum |a_j|$. On a donc $\sum |a_j| < \frac{\pi}{2}$, et en choisissant une ligne proche du demi-cercle, on voit que $\sup_{(a_j)} \sum |a_j| = \frac{\pi}{2}$.

4 Les conditions de Rudin, Pisier et Bourgain

Ce sont trois conditions nécessaires et suffisantes pour que Λ soit Sidon. Nous les désignons par **(CR)**, **(CP)** et **(CB)**.

(CR) Il existe un $C > 0$ tel que, pour tout polynôme $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{f}(\lambda) \lambda$,

$$\|f\|_p = C \sqrt{p} \|f\|_2 \quad \text{pour } p > 2$$

(CP) Il existe un $b > 0$ tel que toute partie finie A de Λ contienne un ensemble qi B tel que $|B| \geq b|A|$

(CB) (déjà écrite en 2 iii). Il existe $c > 0$ tel que, pour toute mesure positive ϖ sur Λ , il existe une partie Λ' de Λ , qi et telle que $\varpi(\Lambda') \geq c\varpi(\Lambda)$.

Historique et remarques

(**CR**) a été établi par Rudin (1960 [11]) comme condition nécessaire, et par Pisier [8] comme condition suffisante. (**CP**) a été établi par Pisier comme condition nécessaire et suffisante [9], [10]. (**CB**), qui implique (**CP**) en prenant pour ϖ la mesure de décompte, a été introduit par Bourgain [1], ainsi que l'enchaînement

$$\text{Sidon} \implies (\mathbf{CR}) \implies (\mathbf{CP}) \implies (\mathbf{CB}) \implies \text{Sidon}.$$

Nous avons déjà vu en 2 (**CB**) \implies Sidon. Reste à montrer Sidon \implies (**CR**), (**CR**) \implies (**CP**) et (**CP**) \implies (**CB**).

Sidon implique (CR)

Proposition préliminaire sur les normes L^q ($q \geq 1$). Soit $\Lambda = \{\lambda_k\}$ un Sidon de constante $< S$, et $\Omega = \mathbb{T}^N = \{(\omega_k)\}$. Quels que soient les a_k complexes, et $q \geq 1$,

$$\frac{1}{S} \left\| \sum a_k e^{2\pi i \omega_k} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq \left\| \sum a_k \lambda_k \right\|_{L^q(G)} \leq S \left\| \sum a_k e^{2\pi i \omega_k} \right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve : on introduit

$$\begin{aligned} \mu_\omega &\in M(G), \quad \|\mu_\omega\| \leq S, \quad \widehat{\mu_\omega}(\lambda_k) = e^{2\pi i \omega_k} \\ \widetilde{\mu_\omega} &\in M(G), \quad \|\widetilde{\mu_\omega}\| \leq S, \quad \widehat{\widetilde{\mu_\omega}}(\lambda_k) = e^{2\pi i \omega_k} \\ f &= \sum a_k \lambda_k, \quad f_\omega = \sum a_k e^{2\pi i \omega_k} \lambda_k; \end{aligned}$$

ainsi $f_\omega = f * \mu_\omega$ et $f = f_\omega * \widetilde{\mu_\omega}$, donc

$$\|f\|_{L^q(G)} \leq \|\widetilde{\mu_\omega}\| \|f_\omega\|_{L^q(G)} \leq \|f_\omega\|_{L^q(G)}$$

soit

$$\int_G |f|^q \leq S^q \int_G |f_\omega|^q,$$

et, en prenant la moyenne sur Ω ,

$$\int_G |f|^q \leq S^q E \int_G |f_\omega|^q = S^q \int_G E |f_\omega|^q = S^q E \left| \sum a_k e^{2\pi i \omega_k} \right|^q$$

et de même pour la première inégalité.

Preuve que Sidon implique (CR) (inégalités de Rudin) :

On établit d'abord, ce qui est classique, et facile au moyen de la transformée de Laplace, que pour des a_k réels

$$\left\| \sum \pm a_k \right\|_{L^q(\Omega)} \leq c_0 \sqrt{q} \left(\sum a_k^2 \right)^{1/2}$$

puis on utilise deux fois la proposition préliminaire $((\pm) \rightarrow (\omega_k) \rightarrow (\lambda_k))$ pour conclure.

(CR) implique (CP)

Pour simplifier les écritures nous allons supposer $\lambda^2 \neq 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, en plus de l'hypothèse (CR). Nous écrirons Λ au lieu de la partie finie A .

Si $D \subset \Lambda$, et si d est un entier $\neq 1$, le nombre de relations de hauteur d dans D , c'est-à-dire d'égalités $\prod_{\lambda \in D} \lambda^{\varepsilon_\lambda} = 1$, avec $\varepsilon_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ et $\sum |\varepsilon_\lambda| = d$, est

$$\int_G \prod_{\lambda \in D, \alpha_\lambda \in \{0,1\}, \sum \alpha_\lambda = d} (\lambda + \bar{\lambda})^{\alpha_\lambda}.$$

Choisissons une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes ξ_λ ($\lambda \in \Lambda$) de même loi $P(\xi_\lambda = 1) = \eta$, $P(\xi_\lambda = 0) = 1 - \eta$, et définissons D par sélection aléatoire :

$$D = D(\omega) = \{\lambda \in \Lambda : \xi_\lambda = 1\}$$

Le nombre de relations de hauteur d dans D est alors

$$\int_G \prod_{\lambda \in \Lambda, \alpha_\lambda \in \{0,1\}, \sum \alpha_\lambda = d} (\lambda + \bar{\lambda})^{\alpha_\lambda \xi_\lambda}$$

et son espérance est

$$\eta^d \int_G \prod_{\lambda \in \Lambda, \alpha_\lambda \in \{0,1\}, \sum \alpha_\lambda = d} (\lambda + \bar{\lambda})^{\alpha_\lambda}.$$

Or

$$\prod_{\lambda \in \Lambda, \alpha_\lambda \in \{0,1\}, \sum \alpha_\lambda = d} (\lambda + \bar{\lambda})^{\alpha_\lambda} \leq \frac{1}{d!} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + \bar{\lambda}) \right)^d.$$

L'hypothèse **(CR)** dit que

$$\begin{aligned} \int_G \left(\sum_{\mu} \lambda \in \Lambda(\lambda + \bar{\lambda}) \right)^d &\leq C^d d^{d/2} \left(\int_G \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + \bar{\lambda}) \right)^2 \right)^{d/2} \\ &= C^d d^{1/2} (2|\Lambda|)^{d/2}. \end{aligned}$$

L'espérance du nombre de relations de hauteur $> \ell$ dans D est majorée par

$$\sum_{d > \ell} \eta^d \frac{1}{d!} C^d d^{d/2} (2|\Lambda|)^{d/2} \leq \left(2\eta C e \sqrt{\frac{|\Lambda|}{\ell}} \right)^\ell$$

Elle est $< 2^{-\ell}$ si $\eta = \frac{1}{4Ce}$ (nous faisons ce choix) et $\ell \geq \frac{1}{4}\eta|\Lambda|$.

Choisissons $\ell = \frac{1}{4}\eta|\Lambda|$. Comme $E|D| = \eta|\Lambda|$, il existe un ω tel que $|D| > \frac{1}{2}\eta|\Lambda|$ et qu'il n'y ait dans D aucune relation de hauteur $> \ell$; remarquons que $\ell < \frac{1}{2}|D|$ pour le $D = D(\omega)$ choisi.

Alors vient la belle idée. On prend dans D une relation de hauteur maximale ($\leq \ell$). C'est du type $\prod_{\lambda \in D'} \lambda^{\varepsilon_\lambda} = 1$ avec $\varepsilon_\lambda = \pm 1$, pour un $D' \subset D$,

tel que $|D'| \leq \ell$. Choisissons $B = D \setminus D'$. S'il y avait une relation dans B , on en ferait le produit membre à membre avec la relation de hauteur maximale, et comme B et D' sont disjoints on obtiendrait une relation de hauteur strictement supérieure, ce qui est impossible. Donc B est *qi*.

De plus $|B| > \frac{1}{2}|D| > \frac{1}{4}\eta|\Lambda| = \frac{1}{16Ce}|\Lambda|$, donc $|B| > b|\Lambda|$ ($= b|A|$) avec $b = \frac{1}{16Ce}$ (indépendant de A).

Le cas où $\lambda^2 = 1$ pour certains $\lambda \in \Lambda$ ne nécessite que des modifications d'écriture que je laisse au lecteur. On a donc montré **(CR)** \implies **(CP)**.

(CP) implique (CB)

C'est la partie la plus laborieuse de la théorie de Bourgain. Je la présenterai en trois étapes : 1) réduction de la mesure ϖ à une forme plus maniable, à savoir une combinaison linéaire de mesures de décompte sur des parties Λ_j de Λ , *qi* et de tailles très différentes 2) construction par sélection aléatoire de parties A_j des Λ_j dont la dépendance à l'égard des autres Λ_k est soigneusement contrôlée 3) utilisation d'un argument de maximalité analogue à celui de la preuve de **(CR)** \implies **(CP)** pour obtenir des parties Λ'_j des A_j dont la réunion est Λ' , l'ensemble *qi* cherché. Le jeu consistera à conserver une proportion notable de la masse à chaque étape.

Première étape. Elle se déroule en plusieurs temps.

1.1. Posons

$$\varpi_1(\lambda) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{2^{-k} : 2^{-k} \leq \varpi(\lambda)\}.$$

Ainsi $\varpi_1(\Lambda) \geq \frac{1}{2}\varpi(\Lambda)$. Soit $A_k = \{\lambda : \varpi_1(\lambda) = 2^{-k}\}$; alors

$$\varpi_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k} \sum_{\lambda \in A_k} \delta_\lambda$$

(la dernière somme est la mesure de décompte sur A_k).

1.2. Utilisant **(CP)**, soit $B_k \subset A_k$, qi , avec $|B_k| \geq b|A_k|$. Posons

$$\varpi_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k} \sum_{\lambda \in B_k} \delta_\lambda.$$

Ainsi $\varpi_2(\Lambda) \geq b \varpi_1(\Lambda)$.

1.3. Soit $R > 1$ (R sera défini à la seconde étape) et

$$K_j = \{k : R^j \leq |B_k| < R^{j+1}\} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Posons $k(j) = \inf K_j$ ($= -\infty$ si $K_j = \emptyset$), et

$$\varpi_3 = \sum_j 2^{-k(j)} \sum_{\lambda \in B_{k(j)}} \delta_\lambda.$$

Si $k \in K_j$,

$$\varpi_2(B_k) = 2^{-k}|B_k| \leq \varpi_3(B_{k(j)})2^{-(k-k(j))}R$$

donc

$$\varpi_2\left(\bigcup_{k \in K_j} B_k\right) \leq 2R \varpi_3(B_{k(j)})$$

et $\varpi_3(\Lambda) \geq \frac{1}{2R}\varpi_2(\Lambda)$.

1.4. Si

$$\varpi_3\left(\bigcup_{j \text{ pair}} B_{k(j)}\right) \geq \varpi_3\left(\bigcup_{j \text{ impair}} B_{k(j)}\right)$$

on pose $\Lambda_j = B_{k(2j)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) et

$$\varpi_4 = \sum_j 2^{-k(2j)} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \delta_\lambda.$$

Sinon, on pose $\Lambda_j = B_{k(2j-1)}$ ($j = 1, 2, \dots$) et

$$\varpi_4 = \sum_j 2^{-k(2j-1)} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \delta_\lambda.$$

Dans les deux cas, $\varpi_4(\Lambda) \geq \frac{1}{2}\varpi_3(\Lambda)$.

1.5. Si $\varpi_4(\Lambda_0) \geq \frac{1}{2}\varpi_4(\Lambda)$ on choisit $\Lambda' = \Lambda_0$ et on a établi **(CB)**, avec $c = \frac{b}{16R}$. On va donc se restreindre dans la suite au cas $\varpi_4(\Lambda_0) < \frac{1}{2}\varpi_4(\Lambda)$, et on définit ϖ_5 comme la restriction de ϖ_4 à $\Lambda \setminus \Lambda_0$; ainsi $\varpi_5(\Lambda) \geq \frac{1}{2}\varpi_4(\Lambda) \geq \frac{b}{16R}\varpi(\Lambda)$, ϖ_5 est une combinaison linéaire à coefficients positifs de mesures de décompte sur les Λ_j , on a $|\Lambda_j| \geq R$ et $\frac{|\Lambda_{j+1}|}{|\Lambda_j|} \geq R$ pour $j = 1, 2, \dots$

Pour démontrer **(CB)**, il suffira de trouver des $\Lambda'_j \subset \Lambda_j$, tels que $|\Lambda'_j| \geq \frac{1}{10}|\Lambda_j|$, et que $\cup \Lambda'_j$ soit qi .

Seconde étape. Rappelons que les Λ_j sont qi , avec $|\Lambda_1| \geq R$ et $\frac{|\Lambda_{j+1}|}{|\Lambda_j|} \geq R$ ($j = 1, 2, \dots$).

Fixons j . Soit (ξ_λ) ($\lambda \in \Lambda_j$) une suite de $v \cdot a \cdot$ de Bernoulli indépendantes, avec $P(\xi_\lambda = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(\xi = 0) = \frac{3}{4}$, et soit

$$A(\omega) = \{\lambda \in \Lambda_j : \xi_\lambda = 1\}.$$

Comme $|\Lambda_j| \geq R$, on a $|A(\omega)| > \frac{1}{5}|\Lambda_j|$ avec une probabilité p_R voisine de 1 quand R est grand.

Soit ρ un élément de Γ engendré par $\bigcup_{k \neq j} \Lambda_k$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \rho &= \prod_{k \neq j} \rho_k \quad (\text{produit fini}) \\ \rho_k &= \prod_{\ell} \lambda_{k\ell}^{n_{k\ell}} \quad (\lambda_{k\ell} \in \Lambda_k, n_{k\ell} \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Posons $d(\rho_k) = \sum_{\ell} |n_{k\ell}|$. Pour le moment, ρ est fixé.

On va s'intéresser aux σ engendrés par $A(\omega)$, de la forme $\sigma = \prod_{\lambda \in A(\omega)} \lambda^{\varepsilon_\lambda}$ avec $\varepsilon_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, tels que $d(\sigma) = \sum |\varepsilon_\lambda| > L$ fixé. Désignons par $N(\omega)$ le nombre total de relations $\sigma\rho = 1$. Ainsi

$$N_\rho(\omega) = \int_G S_L \prod_{\lambda \in A(\omega)} (1 + \lambda + \bar{\lambda}) \rho$$

$S_L \prod$ désignant la somme des termes du développement dont la hauteur dépasse L . On peut écrire

$$\begin{aligned} N_\rho(\omega) &= \int_G S_L \prod_{\lambda \in \Lambda_j} (1 + (\lambda + \bar{\lambda})\xi_\lambda) \rho \\ EN_\rho(\omega) &= \int_G S_L \prod_{\lambda \in \Lambda_j} \left(1 + \frac{1}{4}(\lambda + \bar{\lambda})\right) \rho. \end{aligned}$$

La quasi-indépendance de Λ_j nous dit que $\prod_{\lambda \in \Lambda_j} (1 + \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}))$ est une mesure de probabilité; écrivons son développement sous la forme $\sum (\frac{1}{2})^{d(\sigma)} \sigma$. Alors

$$EN_\rho(\omega) = \sum_{\sigma: d(\sigma) > L} \left(\frac{1}{4}\right)^{d(\sigma)} \int \rho \sigma \leq \frac{1}{2^L} \sum_{\sigma} \left(\frac{1}{2}\right)^{d(\sigma)} \int \rho \sigma \leq \frac{1}{2^\lambda}.$$

Considérons maintenant tous les $\rho = \prod_{k \neq j} \rho_k$ pour lesquels $d(\rho_k) \leq d_k$, suite positive fixée, et soit $N(\omega)$ le nombre total des relations $\rho\sigma = 1$ entre ces ρ et les σ considérés ci-dessus. On a $N(\omega) = \sum_\rho N_\rho(\omega)$,

$$EN(\omega) \leq \frac{1}{2^L} \sharp \{\rho\}.$$

Or $\sharp\{\rho\} = \prod_{k \neq j} \sharp\{\rho_k\}$. Evaluons $\sharp\{\rho_k\}$. C'est au plus le nombre de solutions de $\sum_{\ell} |n_{k\ell}| \leq d_k$ (voir ci-dessus la définition de ρ_k), que je désigne par $N(d_k, |\Lambda_k|)$. Ainsi

$$EN(\omega) \leq \frac{1}{2^L} \prod_{k \neq j} N(d_k, |\Lambda_k|).$$

Evaluons la fonction $N(d, q)$. C'est le nombre des fonctions $f : \{1, 2, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $\sum_m |f(m)| \leq d$. Comme le nombre de valeurs $f(m) \neq 0$ ne dépasse pas $d \wedge q$, et que le nombre des fonctions $|f| : \{1, 2, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ telles que $\sum |f|(m) \leq d$ est exactement $\binom{d+q}{q}$ (on le voit en codant ces fonctions par des parties à d éléments de $\{1, 2, \dots, q+d\}$), on obtient

$$N(d, q) \leq 2^{d \wedge q} \binom{d+q}{q} \left(= 2^{d \wedge q} \binom{d+q}{d} \right),$$

donc, pour une constante absolue C ($C = 20$ convient)

$$\begin{aligned} N(d, q) &\leq C \left(\frac{q}{d}\right)^d \quad \text{si } d \leq q \\ N(d, q) &\leq C \left(\frac{d}{q}\right)^q \quad \text{si } q \leq d. \end{aligned}$$

Ainsi

$$EN(\omega) \leq \frac{1}{2^L} \exp \left(\sum_{d_k \leq |\Lambda_k|} d_k \log \left(C \frac{|\Lambda_k|}{d_k} \right) + \sum_{d_k > |\Lambda_k|} |\Lambda_k| \log \left(C \frac{d_k}{|\Lambda_k|} \right) \right).$$

Choisissons $d_k |\Lambda_k| = |\Lambda_j|^2$ pour tout $k \neq j$. Ainsi $d_k \leq |\Lambda_k|$ signifie $|\Lambda_j|^2 \leq |\Lambda_k|^2$, c'est-à-dire $j < k$, donc

$$EN(\omega) \leq \frac{1}{2^L} \exp \left(\sum_{k \geq j} \frac{|\Lambda_j|^2}{|\Lambda_k|} \log \left(C \frac{|\Lambda_k|^2}{|\Lambda_j|^2} \right) + \sum_{k < j} |\Lambda_k| \log \left(C \frac{|\Lambda_j|^2}{|\Lambda_k|^2} \right) \right).$$

On peut alors faire usage de l'hypothèse sur les quotients de $|\Lambda_j|$, et on obtient pour $R > R(C)$

$$EN(\omega) \leq \frac{1}{2^L} \exp |\Lambda_j| \left(\sum_{k \geq j} \frac{1}{R^{k-j}} \log(C R^{2(k-j)}) + \sum_{k < j} \frac{1}{R^{j-k}} \log(C R^{2(j-k)}) \right).$$

La parenthèse est aussi petite qu'on veut par choix de R . Choisissons $L = \frac{|\Lambda_j|}{10}$. Alors, par choix de R , $EN(\omega)$ est aussi petit qu'on veut, donc également $P(N(\omega) \neq 0)$.

Donc, à condition de prendre R assez grand, on peut choisir ω de façon à avoir simultanément $|A(\omega)| > \frac{1}{5} |\Lambda_j|$ et $N(\omega) = 0$, $N(\omega)$ désignant le nombre total de relation $\sigma \rho = 1$ entre les $\sigma = \prod_{\lambda \in A(\omega)} \lambda^{\varepsilon_\lambda}$ ($\varepsilon_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$) de hauteurs

$\geq \frac{|\Lambda_j|}{10}$ et les ρ produits de ρ_k engendrés par les Λ_k ($k \neq j$), de hauteurs $\leq d_k = \frac{|\Lambda_j|^2}{|\Lambda_k|}$.

Désormais, nous désignons par A_j cet $A(\omega)$ ainsi choisi.

Troisième étape. Il s'agit de réaliser le programme tracé à la fin de la première étape. Commençons par définir Λ'_j . Pour cela, fixons j , et considérons tous les $\sigma = \prod_{\lambda \in A_j} \lambda^{\varepsilon_\lambda}$ ($\varepsilon_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$) et $\rho_k = \prod_{\lambda \in \Lambda_k} \lambda^{n_\lambda}$ ($n_\lambda \in \mathbb{Z}$) ($k \neq j$), en

nombre fini, tels que $d(\rho_k)|\Lambda_k| \leq d(\sigma)|\Lambda_j|$ ($k \neq j$) et $\sigma \prod \rho_k = 1$. Nous dirons alors que $(\sigma, (\rho_k))$ est un système permis.

Comme $d(\sigma)|\Lambda_j| \leq |\Lambda_j|^2$, nous savons par la conclusion de la seconde étape que les σ d'un système permis vérifient $d(\sigma) < \frac{|\Lambda_j|}{10} < \frac{1}{2}|\Lambda_j|$.

Distinguons deux cas. α) S'il n'existe pas de système permis, posons $\Lambda'_j = A_j$. β) S'il en existe, choisissons-en un tel que $d(\sigma)$ soit maximum, fixons σ et S_j son "support", c'est-à-dire l'ensemble minimal dans A_j qui l'engendre : $\sigma = \prod_{\lambda \in S_j} \lambda^{\alpha_\lambda}$ ($\alpha_\lambda = \pm 1$). Posons alors $\Lambda'_j = A_j \setminus S_j$. On a bien dans tous les cas $|\Lambda'_j| > \frac{1}{2}|\Lambda_j| > \frac{1}{10}|\Lambda_j|$.

Reste à montrer que $\bigcup \Lambda'_i$ est *qi*. Supposons le contraire, à savoir qu'il existe des $\sigma'_i = \prod_{\lambda \in \Lambda'_i} \lambda^{\varepsilon_\lambda}$ ($\varepsilon_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$) tels que $\prod \sigma'_i = 1$. Soit j un entier tel que $d(\sigma'_i)|\Lambda_i|$ soit maximum pour $i = j$. Revenons à la définition de Λ'_j . Comme $(\sigma'_j, (\sigma'_k))$ est un système permis, on est dans le cas β), où l'on a défini un système permis $(\sigma, (\rho_k))$ tel que $d(\sigma)$ soit maximum. Posons $\sigma' = \sigma \sigma'_j$ et $\rho'_k = \rho_k \sigma'_k$ ($k \neq j$). Comme les "supports" de σ et de σ'_j sont disjoints, on a $d(\sigma') = d(\sigma) + d(\sigma'_j)$. Pour $k \neq j$, on a $d(\rho'_k) \leq d(\rho_k) + d(\sigma'_k)$, et on sait que $d(\rho_k)|\Lambda_k| \leq d(\sigma)|\Lambda_j|$ et $d(\sigma'_k)|\Lambda_k| \leq d(\sigma'_j)|\Lambda_j|$, donc

$$d(\rho'_k)|\Lambda_k| \leq d(\sigma)|\Lambda_j| + d(\sigma'_j)|\Lambda_j| = d(\sigma')|\Lambda_j|.$$

Le système $(\sigma', (\rho'_k))$ est donc permis, et $d(\sigma') > d(\sigma)$, contrairement à la définition de σ . La contradiction établit que $\bigcup \Lambda'_i$ est *qi*. Ainsi se termine la preuve par Bourgain que la propriété de Sidon est équivalente à chacune des conditions **(CR)**, **(CP)** et **(CB)**. ■

Jean-Pierre Kahane 05.08.2007

Références

- [1] BOURGAIN, J. *Sidon sets and Riesz products*, Annales de l'Institut Fourier 35 (1) (1985), 137–148.
- [2] DRURY, S. *Sur les ensembles de Sidon*, C.R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 162–163.
- [3] KAHANE, J.-P. *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées*, Annales de l'Institut Fourier 7 (1957), 293–314.
- [4] KATZNELSON, Y. *Suites aléatoires d'entiers* Springer Lecture Notes in Math. 336 (1972), 148–152.
- [5] KATZNELSON, Y. et MALLIAVIN, P. *Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbres de restrictions*, C.R. Acad. Sc. Paris 262 (1966), 490–492.
- [6] LI, D. et QUEFFELEC, H. *Introduction à l'étude des espaces de Banach, analyse et probabilités*, Cours spécialisés 12, Soc. Math. France 2004, XXIV+627 p.
- [7] NEUWIRTH, S. *The maximum modulus of a trigonometric trinomial*, arXiv :math/0703236 mars 2007.
- [8] PISIER, G. *Ensembles de Sidon et processus gaussiens*, C.R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 671–674.
- [9] PISIER, G. *De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon*, in Math. Analysis and Applications, ed. L. Nachbin, dedicated to L. Schwartz, Advances in Math. Supplementary Studies vol 7B, Academic Press 1981, 685–726.
- [10] PISIER, G. *Arithmetical characterisation of Sidon sets*, iBull. Amer. Math. Soc. 8 (1983), 87–89.
- [11] RUDIN, W. *Trigonometric series with gaps*, J. Math. Mech. 9 (1960), 203–209.
- [12] RUDIN, W. *Fourier analysis on groups*, Interscience publishers, Wiley 1962, ix+285 p..

- [13] SEIGNER, J.A. *Rademacher variables in connection with complex scalars*,
Acta Math. Univ. Comenianae 66, 2 (1997), 329–336.

Jean–Pierre Kahane
Laboratoire de Mathématique
Université Paris–Sud, Bât. 425
91405 Orsay Cedex
Jean-Pierre.Kahane@math.u-psud.fr